线性代数　中国科学技术大学 2023 春
行列式

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

行列式 (高维平行多面体的有向体积)

定义 (行列式)

方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式记为

$$\det(A) \quad 或 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $n = 1$ 时,

$$\det(A) := a_{11}.$$

当 $n \geq 2$ 时, $\det(A)$ 递归地定义为

$$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

子矩阵, 代数余子式

定义

由矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列上的元素依次排列组成的 $r\times s$ 矩阵称为 A 的子矩阵, 记作

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s}\end{pmatrix}$$

定义

给定一个 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

1. 称 $M_{ij}:=\det\left(A\begin{pmatrix}1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n \\ 1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\end{pmatrix}\right)$ 为元素 a_{ij} 的余子式.
2. 称 $A_{ij}:=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

根据这个定义, 我们可以将行列式的定义式简写为

$$\det(A):=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1j}M_{1j}.$$

行列式基本性质

方阵 A 的行列式具有下列性质:

定理 (行列式行展开)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则对任意 $1\le i\le n$

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.}$$

定理

1. 交换 A 某两行得 B, 则 $\det(B)=-\det(A)$.
2. 将 A 的某一行乘 λ 得 B, 则 $\det(B)=\lambda\det(A)$.
3. 若 A 的某一行是两个向量之和, 则 $\det(A)$ 可拆成两个行列式之和.

行列式基本性质

推论

4. 若 A 的某两行成比例, 则 $\det(A)=0$.
5. 将 A 的某一行 λ 倍加到另一行得 B, 则 $\det(B)=\det(A)$.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. 则 det 可以看成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的函数. 这一函数满足如下性质:

1. 反对称性: $\det(\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j\cdots)=-\det(\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i\cdots)$;
2. 多重线性:
   $\det(\cdots,\lambda\alpha_i+\mu\beta_i,\cdots)=\lambda\det(\cdots,\alpha_i,\cdots)+\mu\det(\cdots,\beta_i,\cdots)$;
3. 规范性: $\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)=1$.

注: 这三条性质唯一地确定了函数 det. (几何意义!!)
例: $\det(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha)=2\det(\alpha,\beta,\gamma)$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\vec{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}\vec{e}_{j_2}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\vec{e}_{j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \cdots, \vec{e}_{j_n}\right) \\
&= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\underbrace{\boxed{\det\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \cdots, \vec{e}_{j_n}\right)}}_{=??}
\end{aligned}$$

其中 S_n 为集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的全体排列集.

行列式显示表示

定义

1. 由 n 个两两不同的正整数组成的有序数组 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 称为一个n 元排列. 由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的排列总数为 $n!$.
2. 称 $(1, 2, \cdots, n)$ 为标准排列.
3. 给定排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$. 若 $1 \le p < q \le n$ 且 $j_p > j_q$, 则称二元组 (j_p, j_q) 为排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 的一个逆序. 例如: $(1, 4, 3, 2)$ 的有三个逆序 $(4, 3), (4, 2), (3, 2)$.
4. 排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 的逆序总数记为 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$. 例如: $\tau(1, 4, 3, 2) = 3$.
5. 若 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 为奇数, 则称 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 为奇排列. 否则称之为偶排列.
6. 将一个排列中的两个元素互换位置, 其余元素位置不变. 这个过程称为一个对换.

引理

1. 对换改变奇偶性.
2. 排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 可经过 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 次相邻位置的对换变为标准排列.

定理 (行列式显示表示)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则

$$\det(A)=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

二三阶行列式示意图

例

1. $S_2 = \{(12), (21)\}, \tau(12) = 0, \tau(21) = 1$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2. $S_3 = \{(123), (231), (312), (132), (213), (321)\}, \tau(123) = 0,$
$\tau(231) = \tau(312) = 2, \tau(213) = \tau(132) = 1, \tau(321) = 3,$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & \iddots & \\ & a_{n-1} & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n)(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n2} \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例

求下列三阶行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

性质

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}$ 为分块矩阵, 其中 A_{ii} 均为方阵. 则

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{k}\det(A_{ii}).$$

证明思路：只需考虑 $k=2$. 此时，不妨设拆分方式为 $n=r+(n-r)$. 则

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{\substack{(j_1,j_2,\cdots,j_r)\in S_{r\le r} \\ (j_{r+1},\cdots,j_n)\in S_{n-r}(r+1,\cdots,n)}} \left((-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_r)} a_{1j_1}\cdots a_{r,j_r}\right)\cdot\left((-1)^{\tau(j_{r+1},\cdots,j_n)} a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}\right) \\
&= \det(A_{11})\det(A_{22})
\end{aligned}$$

定理

$$\det(A) = \det(A^T).$$

证明: 比较两边显示展开.

定理 (列展开)

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则对任意 $1 \leq j \leq n$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.}$$

定理

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$